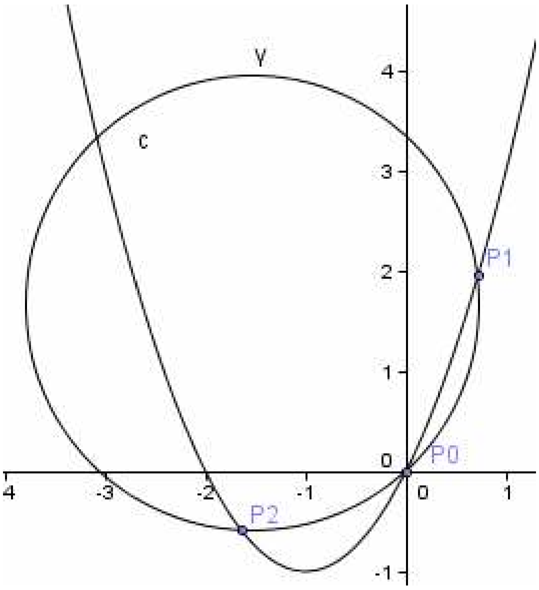
CALCOLO DEL RAGGIO DI CURVATURA DI UNA CURVA REGOLARE DI EQUAZIONE $y = f(x)$

Supponiamo che $y = f(x)$ sia una funzione definita in x_0, ivi derivabile almeno due volte, e che in x_0 la derivata seconda f_0'' sia diversa da zero, e indichiamo con κ il suo grafico. Consideriamo due punti sulla curva κ, rispettivamente di ascissa $x_1 > x_0$ e $x_2 < x_0$, e la circonferenza γ passante per $P_1(x_1, y_1)$, $P_0(x_0, y_0)$ e $P_2(x_2, y_2)$. Facendo tendere P_1 e P_2 a P_0 γ converge alla circonferenza "*osculatrice*" Ω della curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0.

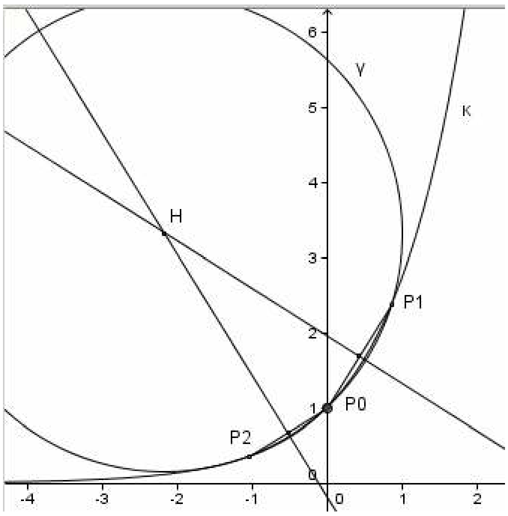


Il raggio di curvatura di κ nel punto P_0 è, per definizione, il raggio della circonferenza osculatrice Ω nel punto di ascissa x_0. La curvatura di κ è, per definizione, il reciproco del raggio di curvatura. Tale raggio è la distanza tra il centro C di Ω e il punto P_0.

Primo metodo – calcolo del centro e del raggio del cerchio osculatore

Si calcolano le coordinate del punto C. Il centro C può essere determinato come punto limite del centro di γ quando P_1 e P_2 sono fatti convergere verso P_0 da parti opposte; cioè, calcolate in funzione di x_1, x_0 e x_2 le coordinate X_γ e Y_γ del centro di κ, otteniamo X_C e Y_C rispettivamente come $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} X_\gamma$ e $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} Y_\gamma$.

In realtà, questo non è il metodo geometrico più semplice dal punto di vista del calcolo, ma è quello più naturale se si considera il significato di raggio di curvatura come raggio del cerchio osculatore.



Il punto H è il centro di una circonferenza passante per i tre punti P_0, P_1 e P_2 della curva κ, con P_0 fisso e gli altri due punti variabili. Facendo convergere P_1 e P_2 su P_0 H tende al centro del cerchio osculatore alla curva κ nel punto P_0 .

Le coordinate del centro di γ possono essere calcolate intersecando gli assi dei segmenti P_0P_1 e P_0P_2 . Poiché i segmenti hanno coefficienti angolari $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ e $\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$ rispettivamente, le equazioni degli assi sono

$$y - \frac{y_0 + y_1}{2} = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right) \quad \text{e} \quad y - \frac{y_0 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_0}{y_2 - y_0}\left(x - \frac{x_0 + x_2}{2}\right)$$

Poniamo x_0 e $y_0 = 0$ (il calcolo del raggio di curvatura non dipende dalla scelta del sistema di riferimento) quindi P_0 coincide con l'origine degli assi.

le equazioni degli assi dei segmenti OP_1 e OP_2 sono allora rispettivamente

$$y - \frac{y_1}{2} = -\frac{x_1}{y_1}\left(x - \frac{x_1}{2}\right) \quad \text{e} \quad y - \frac{y_2}{2} = -\frac{x_2}{y_2}\left(x - \frac{x_2}{2}\right)$$

che scriviamo come

$$y_1\left(y - \frac{y_1}{2}\right) + x_1\left(x - \frac{x_1}{2}\right) = 0$$

$$y_2\left(y - \frac{y_2}{2}\right) + x_2\left(x - \frac{x_2}{2}\right) = 0$$

Consideriamo l'intersezione tra i due assi, data dal sistema

$$\begin{cases} x_1 x + y_1 y = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) \\ x_2 x + y_2 y = \dfrac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) \end{cases}$$

Risolvendo con il metodo di Cramer, si trova:

$$X_\gamma = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2) & y_1 \\ \frac{1}{2}(x_2^2+y_2^2) & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2)\cdot y_2 - \frac{1}{2}(x_2^2+y_2^2)\cdot y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

$$Y_\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2) \\ x_2 & \frac{1}{2}(x_2^2+y_2^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2}x_1\cdot(x_2^2+y_2^2) - \frac{1}{2}x_2\cdot(x_1^2+y_1^2)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

Poniamo ora $x_2 = -x_1$ (i punti P_1 e P_2 sono da parti opposte rispetto a P_0 e, nel calcolare il limite per P_1 e P_2 tendenti a P_0 , si può supporre che le rispettive ascisse siano opposte). Sostituiamo x_1 con x , x_2 con $-x$, y_1 con $f(x)$ e y_2 con $f(-x)$.

Otteniamo

$$X_\gamma = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+f^2(x)}{x}\cdot\frac{f(-x)}{(-x)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+f^2(-x)}{(-x)}\cdot\frac{f(x)}{x}}{\frac{f(-x)}{-x} - \frac{f(x)}{x}} =$$

$$\frac{-f(-x)+f(x)\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(-x)}{-x} + f(x) - f(-x)\cdot\frac{f(-x)}{-x}\cdot\frac{f(x)}{x}}{2\cdot\left[\frac{f(-x)}{-x} - \frac{f(x)}{x}\right]} =$$

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2\cdot\left[\frac{f(-x)}{-x} - \frac{f(x)}{x}\right]} + \frac{f(x)\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(-x)}{-x} - f(-x)\cdot\frac{f(-x)}{-x}\cdot\frac{f(x)}{x}}{2\cdot\left[\frac{f(-x)}{-x} - \frac{f(x)}{x}\right]}$$

Dividiamo numeratore e denominatore del primo rapporto per x . Otteniamo

$\dfrac{\frac{f(x)-f(-x)}{x}}{2\cdot\left[\frac{-f(-x)-f(x)}{x^2}\right]}$. Dobbiamo calcolare il limite, per $x \to 0+$, di questo rapporto. Il numeratore può essere scritto come $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} + \dfrac{f(-x)-f(0)}{-x}$; i limiti dei due rapporti per $x \to 0+$ sono rispettivamente la derivata destra e sinistra della funzione $f(x)$, che sono entrambe uguali alla derivata di $f(x)$ in $x = 0$, $f'(0)$ o f_0' . Quindi $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)-f(-x)}{x} = 2f_0'$.

Il denominatore, per $x \to 0+$, è una forma $\frac{0}{0}$; applichiamo De l'Hospital e otteniamo

$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(-x) - f(x)}{2x}$ ancora della forma $\frac{0}{0}$; applicando di nuovo De l'Hospital si ottiene $\lim_{x\to 0+} \frac{-f''(-x) - f''(x)}{2} = -\frac{2 \cdot f_0''}{2} = -f_0''$. Perciò

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(-x)}{2 \cdot \left[\frac{f(-x)}{-x} - \frac{f(x)}{x} \right]} = -\frac{f_0'}{f_0''}.$$

Calcoliamo ora il $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) \cdot \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f(-x)}{-x} - f(-x) \cdot \frac{f(-x)}{-x} \cdot \frac{f(x)}{x}}{2 \cdot \left[\frac{f(-x)}{-x} - \frac{f(x)}{x} \right]}$. Anche in questo caso dividiamo numeratore e denominatore per x e otteniamo

$\lim_{x\to 0+} \frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{f(-x)}{-x} + \left(\frac{f(-x)}{-x}\right)^2 \cdot \frac{f(x)}{x}}{2 \cdot \left[\frac{-f(-x) - f(x)}{x^2} \right]}$. Il numeratore tende a $2 \cdot [f_0']^3$, il denominatore a $-2 \cdot f_0''$, quindi il limite è uguale a $-\frac{[f_0']^3}{f_0''}$. Il limite totale è

$$X_C = -\frac{f_0' + [f_0']^3}{f_0''} = -\frac{f_0' \cdot [1 + f_0'^2]}{f_0''}$$

Per Y_γ abbiamo, applicando lo stesso metodo, $Y_\gamma = \frac{\frac{1}{2} x \cdot \left[x^2 + f^2(-x)\right] + \frac{1}{2} x \cdot \left[x^2 + f^2(x)\right]}{xf(-x) + xf(x)}$

Dividiamo per x^3 numeratore e denominatore; tenendo presenti i risultati ottenuti prima abbiamo:

$$Y_\gamma = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[2 + \frac{f^2(-x)}{x^2} + \frac{f^2(x)}{x^2} \right]}{\frac{f(-x) + f(x)}{x^2}} \Rightarrow Y_C = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[2 + \frac{f^2(-x)}{x^2} + \frac{f^2(x)}{x^2} \right]}{\frac{f(-x) + f(x)}{x^2}} =$$

$$\frac{2 + 2 \cdot [f_0']^2}{2 \cdot f_0''} = \frac{1 + [f_0']^2}{f_0''}$$

Il raggio di curvatura R è la distanza tra il centro C e P_0, che nel nostro caso è l'origine, ma trattandosi di una distanza non dipende dalla scelta del sistema di riferimento. Abbiamo

$$R = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{\frac{[f_0']^2 \cdot [1 + (f_0')^2]^2 + [1 + (f_0')^2]^2}{[f_0'']^2}} = \frac{\sqrt{\left[1 + [f_0']^2\right]^3}}{f_0''}$$

Il reciproco $\frac{1}{R}$ è, per definizione, la curvatura nel punto P_0 che quindi è uguale a $\frac{f_0^{''}}{\sqrt{\left[1+f_0^{'2}\right]^3}}$.

Per la circonferenza osculatrice nell'origine si ottiene l'equazione

$$(x+\frac{f_0^{'}+f_0^{'3}}{f_0^{''}})^2+(y-\frac{1+f_0^{'2}}{f_0^{''}})^2 \quad = \quad \frac{\left[1+[f_0^{'}]^2\right]^3}{f_0^{''2}}$$

o, meglio,

$$x^2+y^2+2\frac{f_0^{'}+f_0^{'3}}{f_0^{''}}x-2\frac{1+f_0^{'2}}{f_0^{''}}y \quad = \quad 0$$

Se il punto P_0 non coincide con l'origine, sostituiamo x con $x-x_0$ e y con $y-y_0$. Infine si ottiene l'equazione completa

$$x^2+y^2+2(\frac{f_0^{'}+f_0^{'3}}{f_0^{''}}-x_0)x-2(\frac{1+f_0^{'2}}{f_0^{''}}+y_0)y+x_0^2+y_0^2-2\frac{f_0^{'}+f_0^{'3}}{f_0^{''}}x_0+2\frac{1+f_0^{'2}}{f_0^{''}}y_0 \quad = \quad 0$$

nella quale l'indice 0 si riferisce al punto P_0 .

In alternativa, si può calcolare il centro della circonferenza passante per P_1 ,P_0 e P_2 e poi la sua posizione limite quando P_1 e P_2 convergono su P_0 . Posto come prima $x_0 = y_0 = 0$, scriviamo l'equazione della generica circonferenza di centro (X_γ, Y_γ) passante per l'origine:

$$x^2+y^2-2X_\gamma x-2Y_\gamma y \quad = \quad 0$$

Sostituendo le coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) al posto di x e y otteniamo

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2-2X_\gamma x_1-2Y_\gamma y_1 & = \quad 0 \\ x_2^2+y_2^2-2X_\gamma x_2-2Y_\gamma y_2 & = \quad 0 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per y_2 e la seconda per - y_1 e sommando le due equazioni così ottenute abbiamo

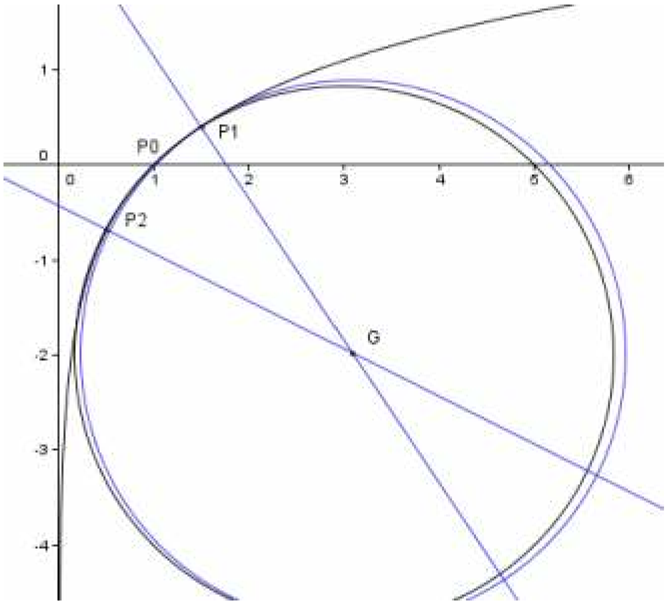
$$X_\gamma \quad = \quad \frac{(x_1^2+y_1^2)\cdot y_2-(x_2^2+y_2^2)\cdot y_1}{2(x_1y_2-x_2y_1)}$$

Moltiplicando la prima per x_2 e la seconda per - x_1 e sommando abbiamo

$$Y_\gamma \quad = \quad \frac{(x_1^2+y_1^2)\cdot x_2-(x_2^2+y_2^2)\cdot x_1}{2(x_2y_1-x_1y_2)}$$

Secondo metodo – calcolo dell'intersezione tra le normali in due punti distinti

Il primo metodo, benché corretto sul piano logico, presenta una discreta mole di calcolo. Si può giungere più facilmente allo stesso risultato calcolando il centro del circolo osculatore come posizione limite del punto di intersezione tra due normali distinte alla curva data, tracciate per due punti da parti opposte rispetto al punto fisso in cui si deve calcolare il raggio di curvatura, quando i due punti convergono verso quest'ultimo. La logica di questo procedimento si basa sull'assunzione che in ogni punto la normale alla curva κ coincide con la direzione del raggio di qualsiasi circonferenza tangente alla curva, quindi l'intersezione tra due normali coincide con quella delle rette contenenti i centri delle circonferenze tangenti, qualunque sia il loro raggio. Supponiamo ora che le circonferenze tangenti siano anche osculatrici; facendo convergere i punti di contatto, il centro del cerchio osculatore costruito dalla sovrapposizione delle due circonferenze coincide con la posizione limite dell'intersezione tra le due normali.



Nella figura, il punto G centro della circonferenza in blu è l'intersezione delle normali in P_1 e P_2. La circonferenza in nero è quella osculatrice in P_0. La curva κ è il log naturale.

Le equazioni delle normali sono

$$y - y_1 = -\frac{1}{f_1'}(x - x_1) \qquad \text{e} \qquad y - y_2 = -\frac{1}{f_2'}(x - x_2)$$

dove f_i' indica la derivata di $f(x)$ nel punto x_i.
Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x + f_1' \cdot y = f_1' \cdot y_1 + x_1 \\ x + f_2' \cdot y = f_2' \cdot y_2 + x_2 \end{cases}$$

Otteniamo

$$X_\gamma = \frac{\begin{vmatrix} f_1' \cdot y_1 + x_1 & f_1' \\ f_2' \cdot y_2 + x_2 & f_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f_1' \\ 1 & f_2' \end{vmatrix}} = \frac{f_1' f_2' y_1 + f_2' x_1 - f_1' f_2' y_2 - f_1' x_2}{f_2' - f_1'} =$$

$\dfrac{f_1' f_2'(y_1 - y_2) + f_2' x_1 - f_1' x_2}{f_2' - f_1'}$; prima di passare al limite, sostituiamo x_1 con x, x_2 con $-x$, y_1 con $f(x)$ e y_2 con $f(-x)$ e, al denominatore, f_1' con $f'(x)$ e f_2' con $f'(-x)$, poi dividiamo tutti i termini per x. Si ottiene

$$X_\gamma = \frac{f_1' f_2' \cdot \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{f(-x)}{-x} \right) + f_2' + f_1'}{-\frac{f'(-x)}{-x} - \frac{f'(x)}{x}}$$; passando al limite per $x \to 0+$ otteniamo:

$$\lim_{x\to 0} f_1' = \lim_{x\to 0} f_2' = f_0' \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(-x)}{-x} = f_0' \; ; \; \lim_{x\to 0}$$

$$X_C = \frac{2 \cdot [f_0']^3 + 2f_0'}{-2f_0''} = -\frac{f_0' \cdot [1 + f_0'^2]}{f_0''}$$

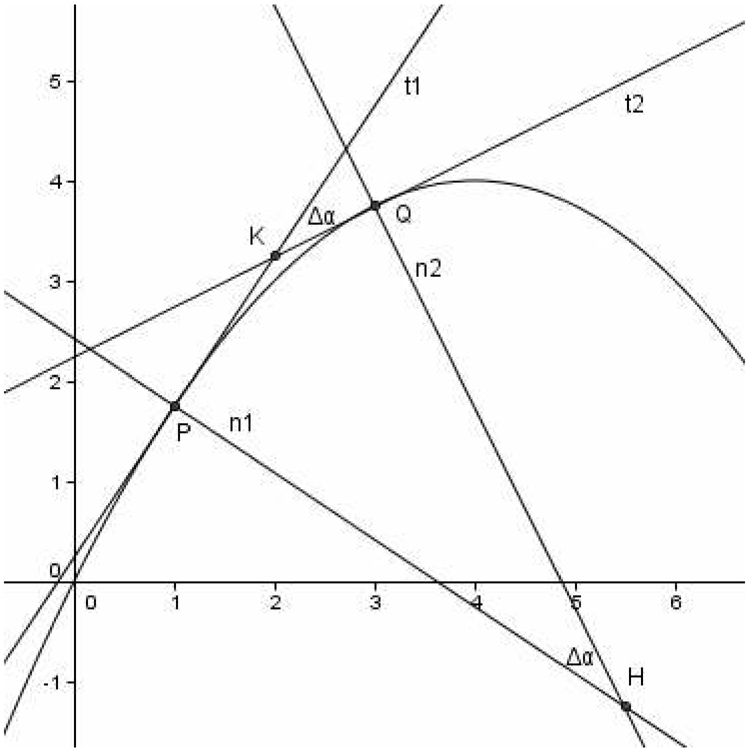
$$Y_\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f_1' \cdot y_1 + x_1 \\ 1 & f_2' \cdot y_2 + x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f_1' \\ 1 & f_2' \end{vmatrix}} = \frac{f_2' y_2 + x_2 - f_1' y_1 - x_1}{f_2' - f_1'}$$; seguendo lo stesso procedimento otteniamo

$$\frac{-f_2' \cdot \frac{f(-x)}{-x} - 1 - f_1' \cdot \frac{f(x)}{x} - 1}{-\frac{f'(-x)}{-x} - \frac{f'(x)}{x}} = \frac{2 + f_2' \cdot \frac{f(-x)}{-x} + f_1' \cdot \frac{f(x)}{x}}{\frac{f'(-x)}{-x} + \frac{f'(x)}{x}}$$ e, passando al limite,

$$Y_C = \frac{2 + 2f_0'}{2f_0''} = \frac{1 + f_0'^2}{f_0''}$$, come già trovato precedentemente.

Terzo metodo - il raggio di curvatura come limite del rapporto tra arco e angolo delle tangenti

Consideriamo la misura del raggio di un cerchio come rapporto tra misura dell'arco Δs e angolo $\Delta\alpha$ al centro corrispondente. La circonferenza è una curva di raggio costante; possiamo definire il raggio di curvatura di una curva generica come il $\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \alpha}$ o, usando i differenziali, $\frac{ds}{d\alpha}$. Il differenziale dell'elemento di curva di equazione $y = f(x)$ in un punto in cui $f(x)$ sia derivabile è $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$. La variazione angolare $\Delta\alpha$ può essere calcolata osservando che l'angolo formato dalle normali in due punti distinti P_1 e P_2 della curva è equivalente all'angolo formato dalle due tangenti:



L'angolo $\Delta\alpha$ con vertice in K è equivalente all'angolo con vertice in H . Infatti entrambi sono supplementari di $P\hat{K}Q$, dato che la somma degli angoli del quadrilatero $PKQH$ è $360°$ e gli angoli in Q e P sono entrambi retti.

Il coefficiente angolare di una retta tangente a una curva di equazione $y = f(x)$ è la tangente trigonometrica dell'angolo α formato dalla retta tangente con una parallela all'asse delle ascisse, quindi $\tan\alpha = f'(x)$ e $\alpha = \arctan[f'(x)]$. Il differenziale $d\alpha$ è dato da

$d[\arctan f'(x)] = \dfrac{f''(x)}{1+[f'(x)]^2}dx$, quindi, facendo riferimento a un punto P_0 ,

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{1+f_0'^2}\cdot\frac{1+f_0'^2}{f_0''} = \frac{\sqrt{(1+f_0'^2)^3}}{f_0''} .$$

***Esempi**.*

1. Data la parabola di equazione $y = x^2$, determinare la circonferenza osculatrice nell'origine.

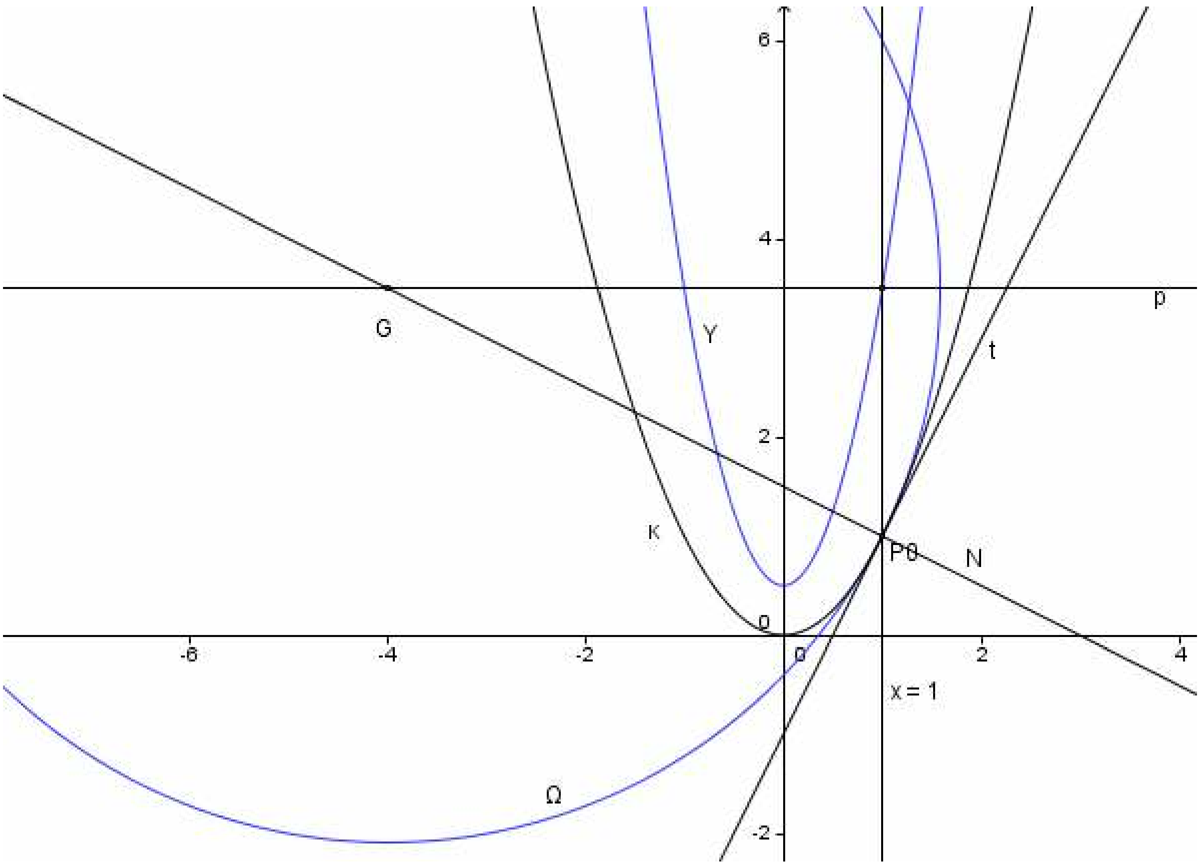
Abbiamo $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Calcoliamo il centro; abbiamo $X_C = 0$ e $Y_C = \dfrac{1}{2}$. Il raggio vale $\dfrac{1}{2}$.

2. Data la parabola $y = ax^2$, determinare in funzione di x il raggio di curvatura e il luogo dei centri dei cerchi osculatori.

Per R abbiamo $\dfrac{\sqrt{[1+[f_0']^2]^3}}{f_0''} = \dfrac{\sqrt{[1+4a^2x^2]^3}}{2}$. Le coordinate del centro sono

$$\begin{cases} X_C = x - \dfrac{2ax + 8a^3x^3}{2} \\ Y_C = y + \dfrac{1 + 4ax^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_C = x - ax - 4a^3x^3 \\ Y_C = 3ax^2 + 1 \end{cases}$$

E' possibile costruire graficamente il cerchio osculatore alla parabola utilizzando le equazioni trovate. Consideriamo $y = x^2$. Si traccia la curva Y delle ordinate dei centri (in blu) e la normale N (perpendicolare alla tangente) alla parabola nel punto P_0; si interseca la Y con la retta verticale passante per P_0 e si traccia la parallela p all'asse delle ascisse passante per questa intersezione. Il centro G del cerchio osculatore è l'intersezione tra N e p.



3. Dimostrare che la curva piana di raggio di curvatura costante è la circonferenza.

Consideriamo l'equazione $\dfrac{\sqrt{[1 + f'^2]^3}}{f''} = R$. Poniamo $f' = y$ e $f'' = y'$. Otteniamo l'equazione

$$y' = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{[1 + y^2]^3} \Rightarrow \frac{R \cdot dy}{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = dx \Rightarrow R\int \frac{dy}{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = x + C_1$$

L'integrale si risolve in base all'identità trigonometrica $\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, per cui poniamo $y = \tan t$, $dy = \frac{dt}{\cos^2 t}$ e quindi otteniamo

$R\int \cos^3 t \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = R\int \cos t dt = R\sin t$ da cui, essendo $\sin t = \frac{\tan t}{\pm\sqrt{1+\tan^2 t}}$, otteniamo

$$\pm R\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad \pm R\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} = x + C_1$$

Poniamo $x + C_1 = X$

Eleviamo al quadrato: $\frac{R^2 f'^2}{1+f'^2} = X^2 \Rightarrow R^2 - \frac{R^2}{1+f'^2} = X^2$ e infine

$f' = \pm\frac{X}{\sqrt{R^2 - X^2}}$, cioè $f(x) = y = \pm\sqrt{R^2 - X^2} + C_2$ e quindi

$$y = \pm\sqrt{R^2 - (x + C_1)^2} + C_2$$

che è l'equazione di una circonferenza di centro $C(-C_1, C_2)$.

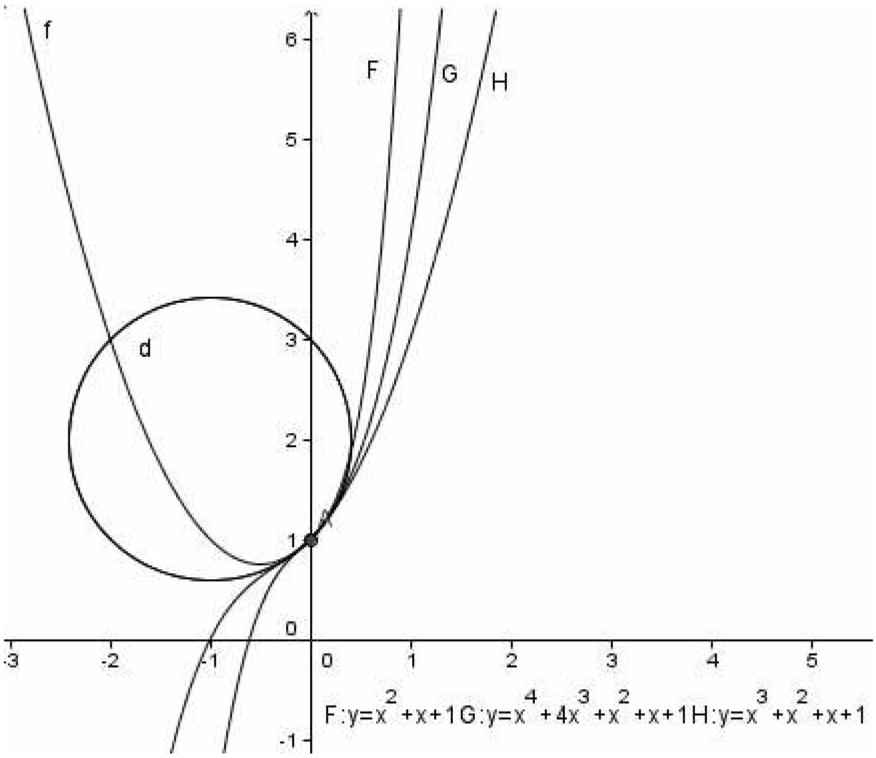
Il calcolo del cerchio osculatore di un polinomio nel suo punto di ascissa nulla è, in un certo senso, un'estensione del calcolo della tangente. Supponiamo che

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

sia l'equazione di un polinomio di grado n . L'equazione della tangente nel punto $x = 0$ è data da

$$y = a_{n-1}x + a_n$$

La tangente è quella retta che ha con il grafico del polinomio un *incontro bipunto* . La circonferenza osculatrice ha un punto di contatto tripunto, essendo ottenuta facendo convergere verso un solo punto tre punti distinti del grafico per cui passa una circonferenza secante. Tutti i polinomi la cui equazione contiene gli stessi tre termini di grado inferiore $a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ hanno in comune la stessa tangente e lo stesso cerchio osculatore nel punto di ascissa nulla.


f
F
G
H
d
F:y=x^2+x+1G:y=x^4+4x^3+x^2+x+1H:y=x^3+x^2+x+1